

# MATURA Z MATEMATYKI 2011 R. PRZYKŁADOWE ODPOWIEDZI

OPRACOWANIE – AKADEMIA MATEMATYKI



5 MAJA 2011

*mgr Marek Dębczyński*

CENTRUM NOWOCZESNEJ EDUKACJI W KALISZU  
MAREK DĘBCZYŃSKI



**Zadanie 1 (Wartość bezwzględna)** Poprawna odpowiedź: C.

Zadanie polega na zastosowaniu oszacowaniu wartości wyrażenia.

**Przydatne:** Liczba  $\Pi \approx 3.14$ .

**Rozwiązanie:** Korzystając z powyższego przybliżenia mamy:

$$A : |4.14| > 5$$

$$B : |2.14| < 2$$

$$C : |3.8| \leq 4$$

$$D : |2.7| \geq 3$$

**Zadanie 2 (Procenty)** Poprawna odpowiedź: B.

Zadanie polega na obliczeniu ceny towaru.

**Dane:** Liczba 9% – 189zł.

**Rozwiązanie:** Korzystając z powyższego mamy:

$$B : x = \frac{189}{9\%} = 2100$$

**Zadanie 3 (Wyrażenia algebraiczne)** Poprawna odpowiedź: B.

Zadanie polega na wyciągnięciu wspólnego czynnika przed nawias.

**Dane:** Wyrażenie  $5a^2 - 10ab + 15a$ .

**Rozwiązanie:** Wyciągamy  $5a$  przed nawias:

$$B : 5a(a - 2b + 3)$$

**Zadanie 4 (Układ równań)** Poprawna odpowiedź: D.

Zadanie polega na obliczeniu wartości parametru.

**Dane:** Wyrażenie

$$4x + 2y = 10$$

$$6x + 3y = 15$$

**Rozwiązanie:** Wstawmy  $a = 3$  i podzielmy pierwsze równanie przez 2 i drugie przez 3

$$2x + y = 5$$

$$2x + y = 5$$

**Zadanie 5 (Równanie)** Poprawna odpowiedź: D.

Zadanie polega na wyznaczeniu wartości  $x$  i podaniu w którym z przedziałów się znajduje.

**Dane:** Wyrażenie

$$x(x + 3) - 49 = x(x - 4)$$

**Rozwiązanie:** Po wymnożeniu mamy

$$x^2 + 3x - 49 = x^2 - 4x$$

$$7x = 49$$

$$x = 7$$

**Zadanie 6 (Równanie)** Poprawna odpowiedź: D.

Zadanie polega na wyznaczeniu wartości  $x$ .

**Dane:** Wyrażenie

$$\frac{3}{8} + \frac{x}{6} < \frac{5x}{12}$$

**Rozwiązanie:** Pomnóżmy obustronnie przez 24

$$9 + 4x < 10x$$

$$6x > 9$$

$$x > 1.5$$

$$x = 2$$

**Zadanie 7 (Równanie)** Poprawna odpowiedź: C.

Zadanie polega na znalezieniu części wspólnej.

**Dane:** Wyrażenie:

$$3(x - 1)(x - 5) \text{ oraz } x > 1$$

**Rozwiązanie:** Rozwiązaniem funkcji kwadratowej jest przedział

$$x \in [1; 5]$$

$$x \in (1; \infty) \cap x \in [1; 5]$$

**Odpowiedź:**

$$x \in (1; 5]$$

**Zadanie 8 (Logarytmy)** Poprawna odpowiedź: B.

Wyznaczenie dziedziny.

**Dane:** Wyrażenie:

$$\log_4(2x - 1)$$

**Rozwiązanie:**

$$2x - 1 > 0$$

$$x > \frac{1}{2}$$

**Zadanie 9 (Funkcja kwadratowa)** Poprawna odpowiedź: A.

Funkcja kwadratowa.

**Dane:** Funkcje:

$$f(x) = x - 2 \quad g(x) = x + 4$$

**Rozwiązanie:**

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$h(x) = (x - 2)(x + 4)$$

$$x_1 = 2 \wedge x_2 = -4 \wedge a > 0$$

**Zadanie 10 (Funkcja liniowa)** Poprawna odpowiedź: D.

Miejsce zerowe  $y=0$ .

**Dane:** Funkcje:

$$f(x) = -\sqrt{2}x + 4$$

**Rozwiązanie:**

$$-\sqrt{2}x + 4 = 0$$

$$-\sqrt{2}x = -4$$

$$x = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

**Zadanie 11 (Ciagi)** Poprawna odpowiedź: D.

Ciąg geometryczny

**Rozwiązanie:**

$$a_3 = 1 \quad a_4 = \frac{2}{3} \quad q = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$1 = a_1 \cdot \frac{4}{9}$$

$$a_1 = \frac{9}{4}$$

**Zadanie 12 (Ciagi)** Poprawna odpowiedź: C.

Ciąg geometryczny

**Rozwiązanie:**

$$a_2 + a_9 = a_3 + a_8$$

$$L = a_1 + r + a_1 + 8r = 2a_1 + 9r$$

$$P = a_1 + 2r + a_1 + 7r = 2a_1 + 9r$$

$$L = P$$

**Zadanie 13 (Trygonometria)** Poprawna odpowiedź: A.

Wyznaczenie wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych

**Rozwiązanie:**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{25}{169} = 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{144}{169}$$

$$\sin \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{12}{5}$$

**Zadanie 14 (Trygonometria)** Poprawna odpowiedź: B.

Jedynka trygonometryczna

**Rozwiązanie:**

$$\frac{\sin^2 38^\circ + \cos^2 38^\circ - 1}{\sin^2 52^\circ + \cos^2 52^\circ + 1}$$

$$\frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$$

**Zadanie 15 (Stereometria)** Poprawna odpowiedź: C.

Tw. Pitagorasa

**Rozwiązanie:**

$$A : |AB| = 5$$

$$B : |BG| = 5$$

$$C : |GE| = \sqrt{41}$$

$$D : |EB| = \sqrt{34}$$

**Zadanie 16 (Planimetria)** Poprawna odpowiedź: B.

Kąt wpisany i środkowy

**Rozwiązanie:** Kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt alfa ma miarę  $\alpha = 200^\circ$

$$B : |GE| = \sqrt{41}$$

**Zadanie 17 (Planimetria)** Poprawna odpowiedź: A.

Trygonometria

**Rozwiązanie:**  $\sin \alpha = \frac{h}{a}$

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{6}$$

$$h = 3\sqrt{3}$$

**Zadanie 18 (Geometria analityczna)** Poprawna odpowiedź: C.

Równoległość prostych

**Rozwiązanie:**  $a_1 = a_2 = 2$

$$y = 2x - 5$$

---

**Zadanie 19 (Geometria analityczna)** Poprawna odpowiedź: B.

Styczna do okręgu - rysunek

**Rozwiązanie:**  $x = 3$

---

**Zadanie 20 (Stereometria)** Poprawna odpowiedź: D.

Pole boczne sześcianu

**Rozwiązanie:**  $6a^2 = 54$

$$a^2 = 9$$

$$a = 3$$

$$d = a\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

---

**Zadanie 21 (Stereometria)** Poprawna odpowiedź: B.

Objętość stożka

**Rozwiązanie:**  $V = \frac{1}{3}P_p \cdot H$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \Pi \cdot 36 \cdot 8 = 96\Pi$$

---

**Zadanie 22 (R.Prawd.)** Poprawna odpowiedź: D.

Kostka

**Rozwiązanie:**  $A = (\{1, 2\}, \{2, 1\})$

$$P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

---

**Zadanie 23 (Statystyka)** Poprawna odpowiedź: D.

Srednia ważona

**Rozwiązanie:**  $\frac{3 \cdot 6 + 4 \cdot 12 + 2 \cdot x}{20} = 4$

$$66 + 2x = 80$$

$$x = 7$$

**Zadanie 24 (Nierówność kwadratowa)** Zadanie polega na rozwiązaniu nierówności kwadratowej.

**Przydatne:**  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

**Rozwiązanie:** Korzystając z powyższego:

$$\Delta = 100 - 36 = 64$$

$$\sqrt{\Delta} = 8$$

$$x_1 = \frac{10 - 8}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{10 + 8}{6} = 3$$

**Rysunek:** Funkcja kwadratowa ma ramiona do góry:

**Odpowiedź:** Rozwiązaniem powyższej nierówności jest przedział  $[\frac{1}{3}, 3]$

**Zadanie 25 (Dowód)** Wzory skróconego mnożenia

**Przydatne:**  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

**Rozwiązanie:** Korzystając z powyższego:

$$a + b = 1$$

$$(a + b)^2 = 1^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 1$$

$$2ab = 1 - (a^2 + b^2)$$

$$ab = \frac{1 - 7}{2} = -3$$

**Z drugiego równania mamy:**

$$a^2 + b^2 = 7$$

$$(a^2 + b^2)^2 = 7^2 \Rightarrow a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 49$$

$$a^4 + b^4 = 49 - 2(ab)^2 = 49 - 18 = 31$$

end.

**Zadanie 26 (Funkcja)** Własności funkcji

**Zbiór wartości:**  $Z_w = [-2, 3]$

**Funkcja malejąca:**  $f$  jest malejąca dla  $x \in [-2, 2]$

**Zadanie 27 (Ciąg arytmetyczny)** Własności ciągu arytmetycznego

**Wzór:** Dla ciągu  $a, b, c$  mamy  $2b = a + c$ .

**Rozwiązanie:**  $2y = x + 19$  oraz  $x + y = 8$

$$x = 8 - y$$

$$2y = 8 - y + 19$$

$$3y = 27 \Rightarrow y = 9$$

$$x = 8 - 9 = -1$$

**Odpowiedź:**  $x = -1$  oraz  $y = 9$

---

**Zadanie 28 (Trygonometria)** Jedynka trygonometryczna

**Wzór:**  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

**Rozwiązanie:**

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2$$

$$\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 2$$

$$\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 2$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

**Odpowiedź:**  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2}$

---

**Zadanie 29 (Trygonometria)** Jedynka trygonometryczna

**Wzór:**  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

**Rozwiązanie:**

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2$$

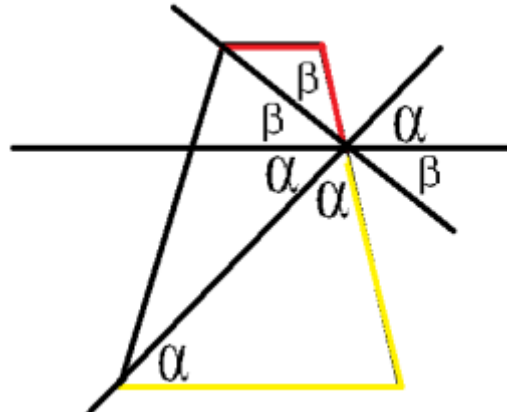
$$\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 2$$

$$\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 2$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

**Odpowiedź:**  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2}$

**Zadanie 30 (Planimetria)** *Rysunek*



**Rozwiązanie:**

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

*end.*

**Zadanie 31 (Rachunek P.)** *Losowanie ze zwracaniem*

	1	2	3	4	5	6	7
1		x			x		
2	x			x			x
3			x			x	
4		x			x		
5	x			x			x
6			x			x	
7		x			x		

**Rozwiązanie:**

**Rozwiązanie:**

$$\bar{\Omega} = 49$$

$$\bar{A} = 16$$

$$P(A) = \frac{16}{49}$$

**Zadanie 32 (Geometria analityczna)** *Równanie prostej*

**Rozwiązanie:** *Prosta prostopadła do  $y = 2x - 3$  to:*

$$y = -\frac{1}{2}x + b \quad S(3, 7)$$

$$7 = -\frac{3}{2} + b$$

$$b = \frac{17}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2}$$

**Rozwiązanie:** Punkt przecięcia się obu prostych to rozwiązanie:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2} \quad y = 2x - 3$$

$$2x - 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2}$$

$$2.5x = 11.5$$

$$x = 4.6$$

$$y = 2 \cdot 4.6 - 3 = 6.2$$

**Odpowiedź:** Punkt styczności ma współrzędne  $P(4,6; 6,2)$

---

**Zadanie 33 (Układ równań/funkcja kwadratowa)** *Ułożenie układu równań*

**Rozwiązanie:**

$$x = \frac{112}{y}$$

$$x \cdot y = 112$$

$$(x + 3)(y - 12) = 112$$

Po wymnożeniu mamy:

$$xy - 12x + 3y - 36 = 112$$

$$112 - 12x + 3y - 36 = 112$$

$$-4x + y - 12 = 0$$

Podstawmy za  $x$ :

$$-\frac{448}{y} + y - 12 = 0$$

$$y^2 - 12y - 448 = 0 \cdot y$$

$$\Delta = 144 + 1792 = 1936$$

$$\sqrt{\Delta} = 44$$

$$y_1 = \frac{12 + 44}{2} = 28$$

$$y_2 < 0$$

**Odpowiedź:** Turysta przebywał dziennie 28km.

---

**Zadanie 34 (Stereometria)** *Tw. Pitagorasa*

**Spostrzenie:** Trójkąt  $MKL$  jest równoboczny.

**Tw. Pitagorasa 1** *Trójkąt ABK liczymy AK*

$$1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = |AK|^2$$
$$|AK|^2 = \frac{5}{4}$$
$$|AK| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

**Tw. Pitagorasa 2** *Trójkąt AKM liczymy MK*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = |MK|^2$$
$$|MK|^2 = \frac{6}{4}$$
$$|MK| = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

**Pole trójkąta** *Obliczamy pole trójkąta MKL*

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{6}{4}\sqrt{3}}{4} = \frac{6\sqrt{3}}{16}$$
$$P = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

**Odpowiedź:** *Pole trójkąta MKL wynosi  $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ .*

---