

MATURA POPRAWKOWA Z MATEMATYKI  
23 SIERPIEŃ 2011 R.  
PRZYKŁADOWE ODPOWIEDZI

OPRACOWANIE – AKADEMIA MATEMATYKI



26 SIERPNIA 2011

*mgr Marek Dębczyński*

CENTRUM NOWCZESNEJ EDUKACJI W KALISZU  
MAREK DĘBCZYŃSKI

**Zadanie 1 (Równanie)** Poprawna odpowiedź: A.

Zadanie polega na wyznaczeniu wartości  $x$ .

**Dane:** Dane jest równanie  $3(2 - 3x) = x - 4$

**Rozwiązanie:** Po wymnożeniu mamy

$$6 - 9x = x - 4$$

$$-10x = -10$$

$$x = 1$$

**Zadanie 2 (Procenty)** Poprawna odpowiedź: C.

Zadanie polega na wskazaniu poprawnego równania.

**Dane:** 15% liczby  $x$  to  $0.15x$ .

**Rozwiązanie:** Korzystając z powyższego mamy:

$$C : x + 0.15x = 230$$

**Zadanie 3 (Układ równań)** Poprawna odpowiedź: A.

Zadanie polega na obliczeniu wartości parametru.

**Dane:** Wyrażenie

$$x + 3y = 5$$

$$2x - 3y = 3$$

**Rozwiązanie:** Pomnóżmy drugie równanie przez 3

$$x + 3y = 5$$

$$6x - 3y = 9$$

**Rozwiązanie:** Dodajmy stronami

$$7x = 14$$

$$x = 2$$

**Rozwiązanie:** Wstawmy  $x$  do pierwszego równania

$$2 + 3y = 5$$

$$3y = 3$$

$$y = 1$$

**Zadanie 4 (Funkcja liniowa)** Poprawna odpowiedź: A.

Funkcja liniowa  $f(x) = ax + b$  jest rosnąca gdy  $a > 0$ .

**Rozwiązanie:** Korzystając z powyższego mamy:

$$m - 2 > 0$$

$$A : m > 2$$

**Zadanie 5 (Funkcja liniowa)** Poprawna odpowiedź: D.

Zadanie polega na wyznaczeniu wzoru funkcji liniowej  $f(x) = ax + b$ .

**Dane:** Wiemy, że  $A = (1, 2)$  oraz  $B = (-2, 5)$   $y = ax + b$

**Rozwiązanie:** Wstawmy zatem w miejsce  $x$  i  $y$  współrzędne punktów  $A$  i  $B$

$$a + b = 2$$

$$-2a + b = 5$$

**Rozwiązanie:** Pomnóżmy pierwsze równanie przez 2

$$2a + 2b = 4$$

$$-2a + b = 5$$

**Rozwiązanie:** Dodajmy stronami

$$3b = 9$$

$$b = 3$$

**Rozwiązanie:** Wstawmy  $b$  do pierwszego równania

$$a + 3 = 2$$

$$a = -1$$

**Rozwiązanie:** Wstawmy  $a$  i  $b$  do  $f(x) = ax + b$ .

$$y = -x + 3$$

**Zadanie 6 (Funkcja liniowa)** Poprawna odpowiedź: B.

Zadanie polega na wyznaczeniu wzoru funkcji liniowej  $y = ax + b$ .

**Dane:** Wiemy, że  $y = x + 1$ . Prosta do niej prostopadła musi mieć  $a = -1$

**Rozwiązanie:** Zatem musimy być postaci

$$y = -x + b$$

**Rozwiązanie:** Wstawmy współrzędne punktu  $P = (0, 5)$  do powyższego wzoru i mamy:

$$0 + b = 5$$

$$b = 5$$

**Rozwiązanie:** Wstawmy  $b$  do  $y = -x + b$ .

$$y = -x + 5$$

**Zadanie 7 (Wyrażenia algebraiczne)** Poprawna odpowiedź: A.

Zadanie polega na zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia.

**Dane:** Wiemy, że  $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ .

$$a^2 - b^2 = 200 \quad a + b = 8$$

**Rozwiązanie:** Wstawmy zatem do wzoru skróconego mnożenia:

$$8 \cdot (a - b) = 200$$

$$(a - b) = 25$$

**Zadanie 8 (Wartość bezwzględna)** Poprawna odpowiedź: A.

Zadanie polega na obliczeniu wartości liczby.

**Rozwiązanie:**

$$|5 - 2| + |1 - 6| = |3| + |-5| = 3 + 5 = 8$$

**Zadanie 9 (Logarytmy)** Poprawna odpowiedź: C.

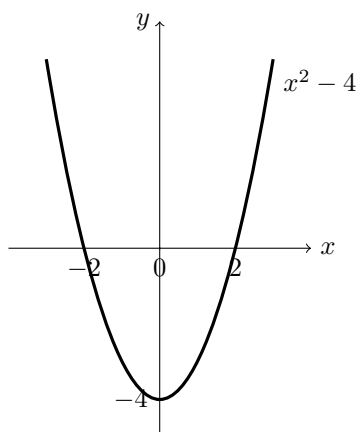
Zadanie polega na obliczeniu wartości liczby.

**Rozwiązanie:**

$$\log_2 4 + 2 \cdot \log_3 1 = \log_2 2^2 + 2 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$$

**Zadanie 10 (Funkcja kwadratowa)** Poprawna odpowiedź: A.

Wyznaczenie zbioru wartości funkcji kwadratowej.



**Rozwiązanie**

**Dana jest funkcja:**  $f(x) = x^2 - 4$

$$q = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 16$$

$$q = \frac{-16}{4} = -4$$

$$A : < -4, +\infty)$$

**Zadanie 11 (Wielomiany)** Poprawna odpowiedź: B.

Odejmowanie wielomianów.

**Dane:**

$$W(x) = x^3 + 3x^2 + x - 11 \quad \text{oraz} \quad V(x) = x^3 + 3x^2 + 1$$

$$W(x) - V(x) = x^3 + 3x^2 + x - 11 - x^3 - 3x^2 - 1 = x - 12$$

**Rozwiązanie:** Stopień wielomianu  $x - 12$  wynosi 1.

**Zadanie 12 (Ciagi)** Poprawna odpowiedź: D.

Ciąg geometryczny

**Rozwiązanie:**

$$a_3 = 5 \quad a_4 = 15 \quad q = \frac{15}{5} = 3$$
$$a_5 = a_4 \cdot 3 = 15 \cdot 3 = 45$$

**Zadanie 13 (Liczby naturalne)** Poprawna odpowiedź: D.

Liczby naturalne

**Rozwiązanie:** Liczby naturalne czterocyfrowe, których suma cyfr wynosi 2 to:

$$1001, 1010, 1100, 2000$$

D : 4 liczby

**Zadanie 14 (Geometria analityczna)** Poprawna odpowiedź: C.

Wyznaczenie długości odcinka  $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ .

**Dane:** Dane są punkty  $A = (1, -4)$   $B = (2, 3)$

**Rozwiązanie:**

$$|AB| = \sqrt{(2 - 1)^2 + (3 + 4)^2}$$
$$|AB| = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

**Zadanie 15 (Trygonometria)** Poprawna odpowiedź: D.

Wzory redukcyjne  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ . Tablica sinusów, cosinusów.

**Rozwiązanie:**

$$\cos 47^\circ = \cos(90^\circ - 43^\circ) = \sin 43^\circ$$

**Zadanie 16 (Ciagi)** Poprawna odpowiedź: C.

Obliczanie wartości wyrazów ciągu  $a_n = 2n^2 - 9$ .

**Rozwiązanie:**

$$a_1 = 2 \cdot 1^2 - 9 = -7$$
$$a_2 = 2 \cdot 2^2 - 9 = 8 - 9 = -1$$
$$a_3 = 2 \cdot 3^2 - 9 = 18 - 9 = 9$$

**Odpowiedź:**  $a_1, a_2$  są ujemne zatem ciąg  $a_n$  ma dwa wyrazy ujemne.

**Zadanie 17 (Stereometria)** Poprawna odpowiedź: C.

Długość przekątnej sześcianu  $D = a\sqrt{3}$

**Rozwiązanie:** Krawędź sześcianu  $a = 9$  zatem  $D = 9\sqrt{3}$

**Zadanie 18 (Statystyka)** Poprawna odpowiedź: C.

Średnia arytmetyczna

**Rozwiązanie:**

$$\frac{3 + 1 + 1 + 0 + x + 2}{6} = 2$$
$$7 + x = 12$$
$$x = 5$$

**Zadanie 19 (Rachunek prawdopodobieństwa)** Poprawna odpowiedź: C.

Rachunek prawdopodobieństwa

**Rozwiązanie:** Wszystkich liczb dwucyfrowych naturalnych jest  $\bar{\Omega} = 90$

**Rozwiązanie:** W tym liczb podzielnych przez 30 jest  $\bar{A} = 30, 60, 90 = 3$

$$P(A) = \frac{3}{90}$$

**Zadanie 20 (Stereometria)** Poprawna odpowiedź: B.

Objętość walca to  $V = P_p \cdot H$

**Dane:**  $H = 6 \quad r = 3$

**Rozwiązanie:**

$$P_p = \pi \cdot r^2 = 9\pi$$
$$V = 9\pi \cdot 6 = 54\pi$$

**Zadanie 21 (Geometria analityczna)** Poprawna odpowiedź: C.

Pole rombu to  $P = a^2 \cdot \sin \alpha$

**Dane:**  $a = 4 \quad \alpha = 60^\circ$

**Rozwiązanie:**  $P = 4^2 \cdot \sin 60^\circ = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

**Zadanie 22 (Stereometria)** Poprawna odpowiedź: B.

Objętość kuli to  $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

**Dane:**  $V = 288\pi$

**Rozwiązanie:**

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 288\pi$$
$$r^3 = 288 \cdot \frac{3}{4}$$
$$r^3 = 216$$
$$r = 6$$

**Zadanie 23 (Stereometria)** Poprawna odpowiedź: B.

Graniastosłup prawidłowy trójkątny ma 9 krawędzi. Zatem  $a = 10$

**Dane:**  $P_c = 3 \cdot P_{boczne} + 2 \cdot P_p = 3 \cdot a^2 + 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

**Rozwiązanie:**

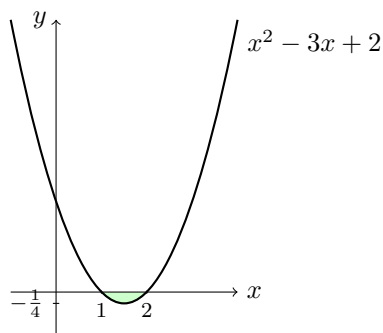
$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 288\pi$$

$$r^3 = 288 \cdot \frac{3}{4}$$

$$r^3 = 216$$

$$r = 6$$

## ZADANIA OTWARTE

**Zadanie 24 (Nierówność kwadratowa)**Zadanie polega na rozwiązaniu nierówności kwadratowej  $x^2 - 3x + 2 < 0$ **Rozwiązanie****Dana jest nierówność:**  $x^2 - 3x + 2 < 0$ .**Przydatne:**  $\Delta = b^2 - 4ac$ .**Rozwiązanie:** Korzystając z powyższego:

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$\sqrt{\Delta} = 1$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

**Odpowiedź:** Rozwiązaniem jest przedział  $x \in (1, 2)$ **Zadanie 25 (Dowód)**

Działania na potęgach

**Przydatne:**  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ .**Rozwiązanie:** Korzystając z powyższego:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 =$$

Rozbijmy liczby parzyste na czynniki pierwsze:

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 15 \cdot 2^4 =$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 2^4 =$$

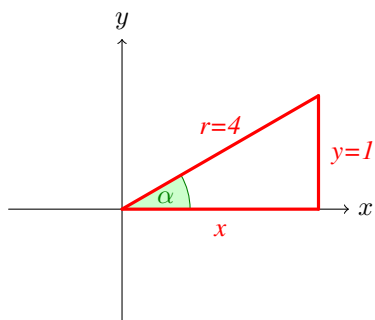
$$= \underbrace{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 15}_{a \in \mathbb{N}} \cdot 2^{15} =$$

$$= a \cdot 2^{15}$$

To jest liczba podzielna przez  $2^{15}$  co należało dowieść.

**Zadanie 26 (Trygonometria)**

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego.

**Rozwiązanie****Dana jest nierówność:**  $\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{1}{4}$ .

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 = 16 - 1 = 15$$

$$x = \sqrt{15} \text{ lub } x = -\sqrt{15}$$

**Zatem:**  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{15}}$  czyli  $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{15}$ .

$$3 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha = 3 + 2 \cdot \frac{1}{15} = 3 \frac{2}{15} = \frac{47}{15}$$

**Zadanie 27 (Ciąg arytmetyczny) Własności ciągu arytmetycznego****Rozwiązanie****Wzór:** Dla ciągu arytmetycznego  $a, b, c$  mamy  $a + c = 2b$ .**Dany jest ciąg:**  $2x + 1, 6, 16x + 2$  zatem:

$$2x + 1 + 16x + 2 = 12$$

$$18x = 9$$

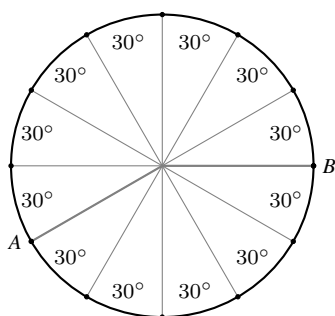
$$x = \frac{1}{2}$$

**Zadanie 28 (Planimetria) Rysunek****Rozwiązanie:** Podobieństwo trójkątów **BOK, BOK - KĄT****Bok:**  $|AK| = |GC| = |BE|$ **Bok:**  $|AE| = |BG| = |CK|$ **Kąt:**  $\angle KAE = \angle EBG = \angle GCK$ **Zatem:**  $|KG| = |GE| = |EK|$ 

cnd.

**Zadanie 29 (Planimetria)**

Kąty w okręgu. Kąt środkowy.

**Rozwiązanie**

**Dane:** Stosunek 7:5 oznacza, że należy podzielić okrąg na  $7 + 5 = 12$  części. Zatem  $360^\circ : 12 = 30^\circ$ .

$$7 \cdot 30^\circ = 210^\circ$$

$$5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$$

**Odpowiedź:** Miara kąta środkowego opartego na krótszym łuku wynosi  $150^\circ$

**Zadanie 30 (Rachunek prawdopodobieństwa)**

Losowanie kul.

**Zadanie:** Jakie warianty mamy, gdy wylosujemy kulę z czerwonej urny?

- 1:  $\{\emptyset\}$  - 0 wariantów
- 2:  $\{1\}$  - 1 wariant
- 3:  $\{1, 2\}$  - 2 warianty
- 4:  $\{1, 2, 3\}$  - 3 warianty
- 5:  $\{1, 2, 3, 4\}$  - 4 warianty
- 6:  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  - 5 wariantów
- 7:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  - 6 wariantów
- 8:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  - 7 wariantów
- 9:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  - 8 wariantów
- 10:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  - 9 wariantów

**Rozwiązanie**

**Dane:** Wszystkich losowań jest  $\bar{\Omega} = 10 \cdot 10 = 100$

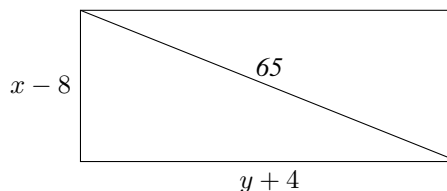
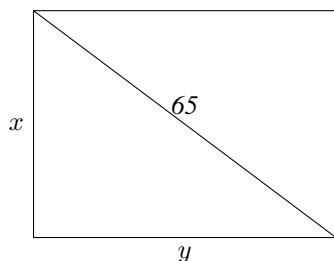
**Dane:** Wszystkich wariantów mamy

$$\bar{A} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

$$P(A) = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$$

### Zadanie 31 (Układ równań/funkcja kwadratowa)

Ułożenie układu równań



#### Boisko nr 1

**Dane:** Z tw. Pitagorasa mamy

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 65^2 \\x^2 + (2x - 10)^2 &= 65^2 \\x^2 + 4x^2 - 40x + 100 &= 4225 \\5x^2 - 40x - 4125 &= 0 \\x^2 - 8x - 825 &= 0 \\\Delta &= 64 + 3300 = 3364 \\\sqrt{\Delta} &= 58 \\x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 - 58}{2} = 33 \\x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 + 58}{2} = -25 \\y_1 &= 2x_1 - 10 = 66 - 10 = 56\end{aligned}$$

#### Boisko nr 2

**Dane:** Z tw. Pitagorasa mamy

$$\begin{aligned}(x - 8)^2 + (y + 4)^2 &= 65^2 \\x^2 - 16x + 64 + y^2 + 8y + 16 &= 65^2 \\x^2 + y^2 + 8y - 16x &= 65^2 - 80 \\65^2 + 8y - 16x &= 65^2 - 80 \\8y - 16x &= -80 \\2x - y &= 10 \\y &= 2x - 10 \\x_1 = 33 \quad i \quad y_1 &= 56 \\x_2 = 33 - 8 = 25 \quad i \quad y_1 &= 56 + 4 = 60\end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Wymiary pierwszego boiska to : Szerokość 33m x Długość 56m

**Odpowiedź:** Wymiary drugiego boiska to : Szerokość 25m x Długość 60m

**Zadanie 32 (Kombinatoryka)** Ilość liczb pięciocyfrowych składających się z cyfr  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

Liczba ma postać:

$$\frac{\text{Warianty}}{\text{Jakie liczby}} = \frac{8}{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}} \cdot \frac{9}{\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}} \cdot \frac{\text{Setki}}{\text{Parzysta}} \cdot \frac{\text{Dziesiątki}}{\text{Parzysta}} \cdot \frac{\text{Jedności}}{\text{Parzysta}}$$

**Wiemy, że:**  $S > D > J$  oraz wszystkie są parzyste 0, 2, 4, 6, 8

**Wszystkie warianty:** 420, 642, 640, 620, 864, 862, 860, 842, 840, 820 łącznie 10.

**Wszystkich liczb pięciocyfrowych jest zatem:**  $8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$

**Zadanie 33 (Stereometria)***Tw. Pitagorasa*

**Dane:**  $|AW| = 6 \quad |BW| = 9 \quad |CW| = 7$

**Oznaczenia:**  $|AD| = |BC| = a \quad |AB| = |DC| = b \quad |DW| = h \quad |DB| = x$

**Tw. Pitagorasa 1** *Trójkąt ADW:*  $a^2 + h^2 = 36 \quad (1)$

**Tw. Pitagorasa 2** *Trójkąt CDW:*  $b^2 + h^2 = 49 \quad (2)$

**Tw. Pitagorasa 3** *Trójkąt BDW:*  $x^2 + h^2 = 81 \quad (3)$

**Tw. Pitagorasa 4** *Trójkąt BDW:*  $a^2 + b^2 = x^2 \quad (4)$

**W miejsce  $x^2$  w równaniu 3 podstawmy  $a^2 + b^2$ :**  $a^2 + b^2 + h^2 = 81 \quad (5)$

**Dodajmy stronami równania 1 i 2:**  $a^2 + b^2 + h^2 + h^2 = 85 \quad (6)$

**W miejsce  $a^2 + b^2 + h^2$  w równaniu 6 podstawmy 81:**  $81 + h^2 = 85 \quad (7)$

$$h^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad h = 2$$

**Wracając do równania 1 mamy:**  $a^2 + 4 = 36 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 32 \quad \Rightarrow \quad a = 4\sqrt{2}$

**Wracając do równania 2 mamy:**  $b^2 + 4 = 49 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 45 \quad \Rightarrow \quad b = 3\sqrt{5}$

**Objętość ostrosłupa:**  $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2 = 8\sqrt{10}$

**Odpowiedź:** *Objętość ostrosłupa wynosi  $8\sqrt{10}$ .*